

Complex Systems Engineering

Fraktale

Prof. Dr. Christin Seifert

18. Oktober 2017

University of Passau, WS 2017/2018

1. Einführung
2. Fraktale Dimension
3. Fixpunktfraktale
4. Besondere Fraktale
5. Zusammenfassung

Einführung

DEFINITION

Definition

Fraktale sind geometrische Objekte, die selbstähnlich sind. Fraktale besitzen skaleninvariante Eigenschaften, d.h. Eigenschaften, die unabhängig von der Vergrößerung sind.



Abbildung 1: Romanesco Gemüse (Photo privat)

- Begriff geprägt 1977 von Benoit B. Mandelbrot
- Erste Publikation *The Fractal Geometry of Nature* [3]
- Anwendung in der Digitalkunst ("Fraktalkunst")
- Anwendung für computergestützte Simulation von formenreichen Objekten, z.B. Landschaftssimulation



Abbildung 2: Benoit Mandelbrot (By Rama (Own work) CC BY-SA 2.0 fr, via Wikimedia Commons)

1. Zeichne eine Strecke
2. Zeichne die Strecke ab und ersetze dabei jeden Streckenabschnitt wie folgt:
 - Teile die Strecke in drei gleiche Teile
 - Ersetze den mittleren Teil mit einem gleichseitigen Dreieck, wobei die Grundlinie des Dreiecks der originale Streckenabschnitt ist. Zeichne die Grundlinie selbst nicht mit.

Konstruktionsanweisung

1. Zeichne eine Strecke
2. Zeichne die Strecke ab und ersetze dabei jeden Streckenabschnitt wie folgt:
 - Teile die Strecke in drei gleiche Teile
 - Ersetze den mittleren Teil mit einem gleichseitigen Dreieck, wobei die Grundlinie des Dreiecks der originale Streckenabschnitt ist. Zeichne die Grundlinie selbst nicht mit.

Beginne mit Regel 1, dann Regel 2, Regel 2, usw.

BEISPIELE – KOCH KURVE



Abbildung 3: Koch Kurve, 4 Iterationen (Public domain, via Wikimedia Commons)

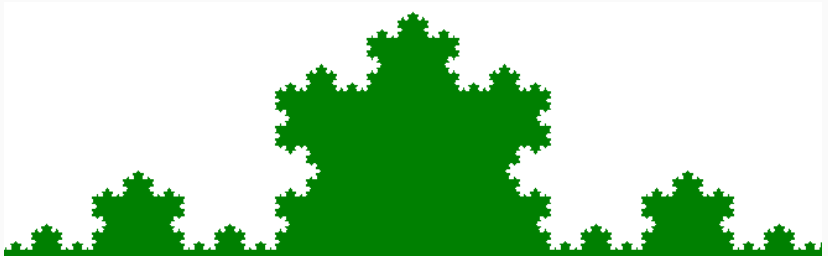


Abbildung 4: Koch Kurve, nach 5 Iterationen (Public domain, via Wikimedia Commons)

- Nach Georg Cantor (Mathematiker, Begründer der Mengenlehre)
 - Gesucht ist eine Teilmenge einer Geraden mit folgenden Eigenschaften:
 1. Es gibt keine Strecke mit mehr als einem Punkt in der Menge (Strecke als Menge von Punkten aufgefasst)
 2. In jeder beliebigen Nähe eines jeden Punktes befinden sich weitere Punkte
 3. Ist x ein Punkt der Geraden, für den in beliebiger Nähe Punkte existieren, so gehört x zur Menge
- d.h. eine Menge, die *total unzusammenhängend, in sich dicht und abgeschlossen* ist

1. Zeichne eine Strecke
2. Teile die Strecke in drei gleiche Teile und entferne den mittleren Teil

Beginne mit Regel 1, dann Regel 2, Regel 2, usw.

Konstruktionsanweisung

1. Zeichne eine Strecke
2. Teile die Strecke in drei gleiche Teile und entferne den mittleren Teil

Beginne mit Regel 1, dann Regel 2, Regel 2, usw.



Abbildung 5: Cantormenge, 7 Iterationen (Public domain, via Wikimedia Commons)

1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck.
2. Teile das Dreieck in 4 gleiche, kongruente, gleichseitige Dreiecke und entferne das mittlere.
3. Wiederhole den vorherigen Schritt mit jedem der übrigen Dreiecke.

Konstruktionsanweisung

1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck.
2. Teile das Dreieck in 4 gleiche, kongruente, gleichseitige Dreiecke und entferne das mittlere.
3. Wiederhole den vorherigen Schritt mit jedem der übrigen Dreiecke.



Abbildung 6: Sierpinski-Dreieck, 5 Iterationen (Public domain, via Wikimedia Commons)

Wie groß ist die Fläche des Sierpinski-Dreiecks?

- Nach jedem Iterationsschritt verkleinert sich die Fläche auf $\frac{3}{4}$ der Originalgröße (da wir eines von vier Dreiecken entfernen)
- D.h. im Iterationsschritt n hat das Dreieck eine Fläche von

$$A_n = \frac{3}{4} A_{n-1}$$

mit A_0 als Ausgangsfläche.

- Geht $n \rightarrow \infty$ so geht $A_n \rightarrow 0$.
- Die Fläche des Sierpinski-Dreiecks ist 0.

Wie groß ist die Kantenlänge des Sierpinski-Dreiecks?

- In jeder Iteration wird ein Dreieck in 3 Dreiecke mit halber Kantenlänge umgewandelt.
- D.h. der Faktor für die Vergrößerung der Kantenlänge ist $\frac{3}{2}$
- Im Iterationsschritt n hat das Dreieck eine Kantenlänge von

$$l_n = \frac{3}{2} l_{n-1}$$

mit l_0 Kantenlänge (Umfang) des Ausgangsdreiecks.

- Geht $n \rightarrow \infty$ so geht $l_n \rightarrow \infty$.
- Der Kantenlänge des Sierpinski-Dreiecks ist unendlich.

Das Sierpinski-Dreieck ist selbstähnlich¹

¹PDF mit Adobe Acrobat Reader öffnen, um die Animation zu sehen. (Public Domain, via Wikimedia Commons)

Es gibt verschiedene Definitionen von Selbstähnlichkeit

- Definition 1 – **Strikte Selbstähnlichkeit**: Fraktal besteht aus identischen Ausschnitten auf allen Skalen

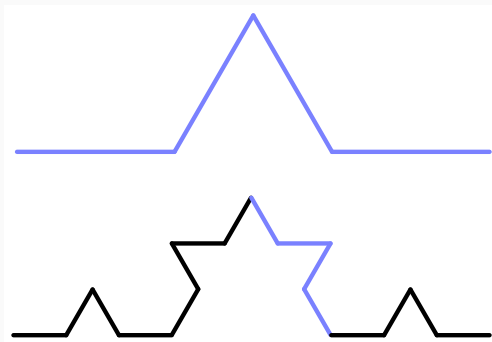


Abbildung 7: Strikte Selbstähnlichkeit der Koch-Kurve

- Definition 2 – **Quasi Selbstähnlichkeit**: Fraktal besteht aus ähnlichen Ausschnitten auf allen Skalen (ähnliche Muster sind erkennbar), Beispiel: Mandelbrotmenge
- Definition 3 – **Statistische Selbstähnlichkeit**: Muster auf allen Skalen haben ähnliche statistische Eigenschaften, Beispiel: Küstenlinie von Großbritannien
- ...

Durch stochastische Prozesse erstellte fraktale Landschaften weisen statistische Selbstähnlichkeit auf

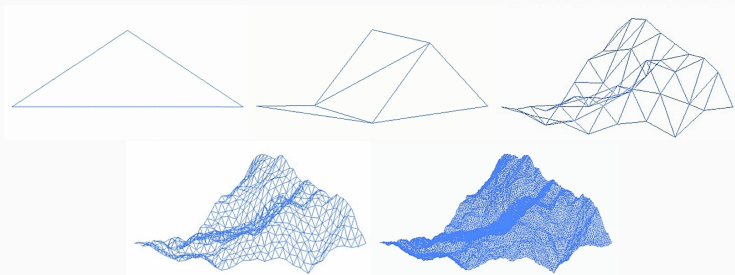


Abbildung 8: Generierung eines fraktalen Berges (Public Domain, António Miguel de Campos, via Wikimedia Commons)

Fraktale Dimension

Wieviel dimensional sind Fraktale?

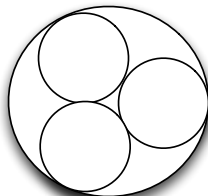
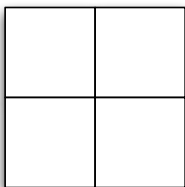
- Klassischer Dimensionalitätsbegriff
 - Linien: eindimensional
 - Flächen: zweidimensional
 - Räume: dreidimensional (und mehr)
- Beispiel Sierpinski-Dreieck
 - Dimensionalität des (euklidischen) Ausgangsraumes: 2
 - Kantenlänge: ∞
 - Fläche: 0
- Klassischer Begriff funktioniert nicht, Sierpinski-Fraktal ist "mehr als eine Linie, aber weniger als eine Fläche"
- Fraktale haben meist eine *nicht-ganzzahlige* Dimension

Definition: Ähnlichkeits-Dimension

Besteht ein Fraktal aus N um den Faktor $\epsilon < 1$ verkleinerten Kopien seiner selbst, so ist es F-selbstähnlich und die Ähnlichkeits-Dimension ist definiert als

$$D = -\frac{\log N}{\log \epsilon}.$$

- Achtung: Ähnlichkeitsdimension ist nur für F-selbstähnliche geometrische Objekte definiert.



Definition: Ähnlichkeits-Dimension

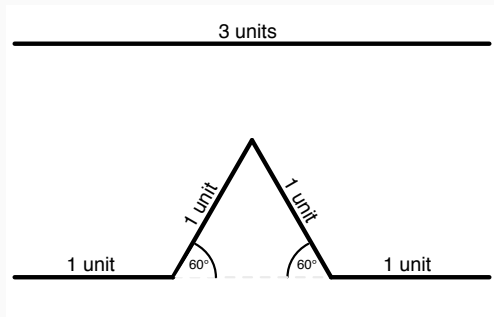
Besteht ein Fraktal aus N um den Faktor $\epsilon < 1$ verkleinerten Kopien seiner selbst, so ist es F-selbstähnlich und die Ähnlichkeits-Dimension ist definiert als

$$D = -\frac{\log N}{\log \epsilon}.$$

Berechnen Sie die Ähnlichkeitsdimension

- der Koch-Kurve,
- der Cantormenge und
- des Sierpinski-Dreieks.

Beispiel Koch-Kurve



- Aus einer Teilstrecke entstehen 4 neue Teilstrecken
- Alle Teilstrecken sind gleich lang (beachte das gleichseitige Dreieck), jede hat $\frac{1}{3}$ der Länge der Originalstrecke
- D.h. Koch-Kurve besteht aus 4 Kopien ihrer selbst, die auf $\frac{1}{3}$ verkürzt sind, d.h. $D = -\frac{\log 4}{\log 1/3} \approx 1,2619$

- Beispiel Cantormenge, $n = 2$, $\epsilon = 1/3$

$$D = -\frac{\log 2}{\log 1/3} \approx 0,6309$$

- Beispiel Koch-Kurve: $N = 4$, $\epsilon = 1/3$

$$D = -\frac{\log 4}{\log 1/3} \approx 1,2619$$

- Beispiel Sierpinski-Dreieck, $N = 3$, $\epsilon = 1/2$

$$D = -\frac{\log 3}{\log 1/2} = 1.5850$$

- Sierpinski-Dreieck repräsentiert ein komplexeres Muster als die Koch-Kurve, die wiederum komplexer als die Cantormenge ist

KOLMOGOROV-DIMENSION (BOXCOUNTING)

- Ausgehend von einem Quadrat, das in n^2 gleich große Quadrate geteilt ist (Analogie: kariertes Papier)
- Es wird gezählt, wie viele Quadrate des Gitters von dem Fraktal überdeckt werden, diese Zahl sei $N(n)$

Definition: Kolmogorov-Dimension

Gibt es eine Zahl D , sodass $N(n)$ wie n^D wächst, so nennt man D die fraktale Dimension.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n)}{\log n}$$

- Beispiel Linie: $N(n)$ wachsen wie n , D ist 1
- Beispiel Fläche: $N(n)$ wachsen wie n^2 , D ist 2

- Unterteilung in n^2 gleich große Quadrate
- Anzahl der überdeckten Quadrate $N(n)$

Definition: Kolmogorov-Dimension

Gibt es eine Zahl D , sodass $N(n)$ wie n^D wächst, so nennt man D die fraktale Dimension.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n)}{\log n}$$

Zeigen Sie durch Zeichnen

- Kolmogorov-Dimension D für eine Linie ist 1
- Kolmogorov-Dimension D für eine Fläche ist 2

KOLMOGOROV-DIMENSION



Abbildung 10: Boxcounting für die Küstenlänge von Großbritannien (CC-SA 3.0, Prokofiev, via Wikimedia Commons)

- Beispiel Cantormenge, Näherung $n = 3$, $N(n) = 2$

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309$$

- Beispiel Koch-Kurve, Näherung $n = 3$, $N(n) = 4$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2619$$

- Beispiel Sierpinski-Dreieck, $n = 3$, $N(n) = 2$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,5850$$

- Sierpinski-Dreieck repräsentiert ein komplexeres Muster als die Koch-Kurve, die wiederum komplexer als die Cantormenge ist

HAUSDORFF-BESICOVITCH-DIMENSION

- Sehr technische Definition, auch kurz Hausdorff-Dimension genannt
- Gegeben: A als Untermenge eines metrischen Raumes, A soll eine Dimension bekommen
- Ziel: mit gegebenem $\epsilon > 0$ und $t > 0$ die Menge A durch kleinere A_i so zu überdecken, dass $\sum_{i=1}^{\infty} [\text{Durchmesser}(A_i)]^t$ möglichst klein ist, wobei $\text{Durchmesser}(A_i) \leq \epsilon$

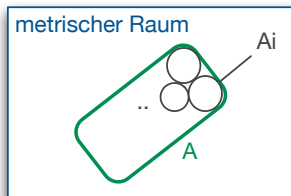


Abbildung 11: Veranschaulichung der Definition zur Hausdorff-Besicovitch-Dimension

HAUSDORFF-BESICOVITCH-DIMENSION

- Das Infimum hängt von A , t und ϵ ab und wird definiert als

$$M(A, t, \epsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\text{Durchmesser}(A_i)]^t$$

- t -dimensionale Hausdorff-Maß ist definiert als

$$M(A, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(A, t, \epsilon)$$

- Beobachtung: $M(A, t)$ nimmt nur zwei Werte an. Es gibt Zahl D , sodass

$$\begin{cases} M(A, t) = \infty & \text{für } t < D \\ M(A, t) = 0 & \text{für } t > D \end{cases}$$

- Die Zahl D heißt Hausdorff-Besicovitch-Dimension

ÜBERSICHT FRAKTALE DIMENSION

Tabelle 1: Zusammenfassung Fraktale Dimension

	Ähnlichkeits-D.	Boxcounting-D.	Hausdorff-D.
Formula	$D = -\frac{\log N}{\log \epsilon}$ N um ϵ verkleinerte Kopien	$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n)}{\log n}$ $N(n)$ aus n^2 überdeckte Quadrate	(siehe vorher)
Cantor	0.6309	0.6309	0.6309
Koch	1.2619	1.2619	1.2619
Sierpinski	1.5849	1.5849	1.5849

Fixpunktfraktale

Können Fraktale „zufälliger“ erzeugt werden?

- Betrachte einzelne Automaten, wobei jeder ein Bild B
 - um einen Winkel α drehen
 - um eine Strecke s verschieben
 - um einen Faktor k verkleinern kann

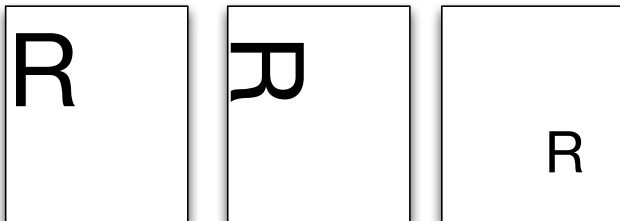


Abbildung 12: Originalbild B (links), gedreht um $\frac{\pi}{2}$ (mittig), Größe halbiert und verschoben (rechts)

- Betrachte weiterhin einen Superautomaten, der die von einzelnen Automaten erzeugten Bilder übereinanderlegt
- Bezeichne das Ergebnis der Anwendung des Superautomaten auf Bild B als $K(B)$

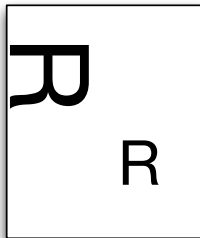


Abbildung 13: Beispielergebnis für Anwendung des Superautomaten

- Betrachte die Folgen $B, K(B), K(K(B)), K(K(K(B))), \dots$, d.h. das Ergebnis des ersten Superautomaten wird als Eingangsbild für die nächste Iteration verwendet
- Beobachtung: Ergebnisse im „Grenzwert“ hängen nicht mehr vom Ausgangsbild ab

Definition: Fixpunktfraktal

Ein Fixpunktfraktal F für einen Automaten K und Bild B ist $F = K_{n \rightarrow \infty}(B^n)$, wobei $B^i = K(B^{i-1})$ mit $B^0 = B$. Es gilt $K(F) = F$ (daher Fixpunktfraktal).

Zeichnen Sie $K(B)$ mit

- Ausgangsbild B Quadrat
- Automat K_1 : Verkleinerung auf $\frac{1}{2}$
- Automat K_2 : Verkleinerung auf $\frac{1}{2}$, Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach rechts
- Automat K_3 : Verkleinerung auf $\frac{1}{2}$, Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach oben

BEISPIEL

- Ausgangsbild B Quadrat
- Automat K_1 : Verkleinerung auf $\frac{1}{2}$
- Automat K_2 : Verkleinerung auf $\frac{1}{2}$, Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach rechts
- Automat K_3 : Verkleinerung auf $\frac{1}{2}$, Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach oben

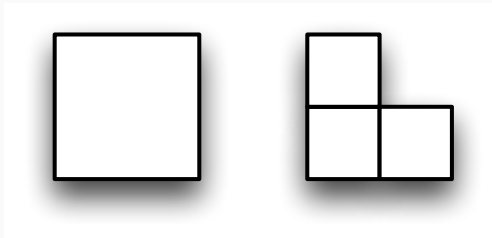


Abbildung 14: Ausgangsbild (links) und nach Anwendung von K_1 , K_2 und K_3 und des Superautomaten K

- Ausgangsbild Dreieck, mit denselben Automaten K_1, K_2, K_3

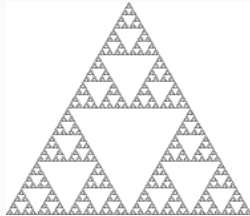


Abbildung 15: Sierpinski-Dreieck (Public domain, via Wikimedia Commons)

- Cantormenge und Kochkurve lassen sich ebenfalls als Fixpunktfraktale generieren

Besondere Fraktale

Definition

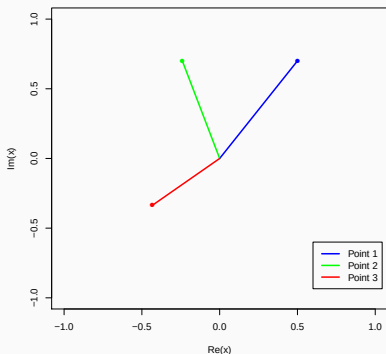
Eine komplexe Zahl z ist eine Zahl der Form $z = a + bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, und i die imaginäre Einheit ist. Es gilt $i^2 = -1$. Dabei bezeichnet man a als den reellen Teil von z , $\operatorname{Re}(z) = a$, und b den imaginären Teil von z , $\operatorname{Im}(z) = b$.

KOMPLEXE ZAHLEN

Beispiel mit 3 komplexen Zahlen $z_0 = 0.5 + 0.7i$, $z_1 = z_0^2$, $z_2 = z_1^2$.
Darstellung in der komplexen Ebene.

$$z_0 = 0.5 + 0.7i, z_1 = -0.2400 + 0.700i, z_2 = -0.4324 - 0.336i$$

```
1 | z0 <- complex(real = 0.5, imaginary = 0.7)
2 | z1 <- z0*z0
3 | z2 <- z1*z1
```



Konstruktionsanweisung

1. Sei C ein festgelegter Punkt in der komplexen Ebene
2. Definiere eine Punktfolge $P_0, P_1, P_2, \dots$ mit
 - P_0 ist frei gewählt
 - $P_1 = P_0^2 + C$
 - $P_2 = P_1^2 + C$
 - usw.

Definition Julia-Menge

Unter der zu C gehörigen Julia-Menge versteht man die Gesamtheit derjenigen P_0 , für die die Folgen $P_0, P_1, P_2, \dots$ beschränkt sind.

Für $C = 0 + 0i$ ist dies die Einheitskreisscheibe. Wenn man Punkte innerhalb des Einheitskreises quadriert (und nichts addiert), bekommt man wieder einen Punkt im Einheitskreis.



Abbildung 16: Visualisierung der Julia-Menge in der komplexen Ebene. Die Julia-Menge sind die schwarzen Punkte im Inneren. Die Konturlinien zeigen divergente Folgen an, die mit gleicher Geschwindigkeit divergieren. Video, das verschiedene Julia-Mengen in Abhängigkeit von C zeigt

https://www.youtube.com/watch?v=VULSpCISH_8 (2:13 min)

Julia-Mengen sind entweder zusammenhängend oder zerklüftet, bestehen also aus „Einzelinseln“.

Definition Mandelbrot-Menge

Unter der Mandelbrot-Menge versteht man die Gesamtheit derjenigen C , für die die Folgen

$P_0 = 0 + 0i$, $P_1 = P_0^2 + C$, $P_2 = P_1^2 + C, \dots$ beschränkt ist, für die also die zugehörige Julia-Menge zusammenhängend ist.

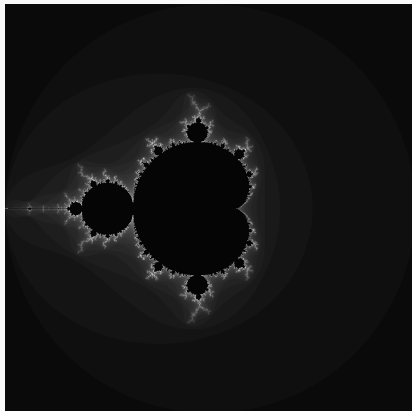


Abbildung 17: Visualisierung der Mandelbrot-Menge in der komplexen Ebene. Die Mandelbrot-Menge sind die schwarzen Punkte im Inneren. Die Konturlinien geben Punktlinien für divergente Folgen an, die mit der gleichen Geschwindigkeit divergieren. Video Erklärung Mandelbrot und Julia-Menge

<https://www.youtube.com/watch?v=mg4bp7G0D3s> (4:13 min)

MANDELBROT-MENGE

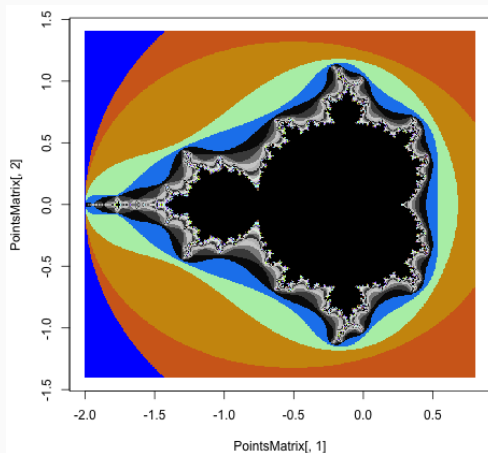


Abbildung 18: Visualisierung der Mandelbrot-Menge. Die Farben entsprechen divergenten Folgen an, die mit der gleichen Geschwindigkeit divergieren. R Code <https://www.r-bloggers.com/fractals-in-r/>

KÜSTENLINIE VON GROSSBRITANNIEN

- Die Messung der Küstenlinie wird stark von der Größe des Längenmessgerätes beeinflusst ("Küstenlinien-Paradox")
- Beispiel Küstenlinie Großbritannien
 - ≈ 2400 km, mit einem 200 km Maß gemessen
 - ≈ 3400 km, mit einem 50 km Maß gemessen
- Die Küstenlinie von Großbritannien weist stochastische Selbstähnlichkeit auf [2], d.h. jeder einzelne Teil kann als Verkleinerung eines größeren Teiles angesehen werden
- Küstenlinien können also als Fraktale betrachtet werden
- Die Länge einer Küstenlinie ist kein aussagekräftiges Maß
- Experimentell ergibt sich folgende fraktale Dimensionen
 - Geradlinige Grenze: $D = 1.0$
 - Küstenlinie von Großbritannien: $D = 1.25$
 - Küstenlinie von Australien: $D = 1.14$

KÜSTENLINIE VON GROSSBRITANNIEN



Abbildung 19: Messung der Küstenlinien mit 200 km Maß (links), und 50 km Maß (rechts) (CC-SA 3.0, via Wikimedia Commons)

- Anwendung zur realitätsnahen Darstellung künstlicher Landschaften in Filmen mit 3D-Fraktalen, Beispielvideo
<https://www.youtube.com/watch?v=EL-XVL4g6E4> (2:09 min)
- Erstellung künstlicher Welten, Beispielvideo
<https://www.youtube.com/watch?v=jLl0PgH4rbw> (5:01 min)

Zusammenfassung

- Fraktale sind komplexe Gebilde, die sich mit Hilfe einfacher Regeln konstruieren lassen
- Die Dimension von Fraktalen sind gebrochene Zahlen
- Fixpunktfraktale können aus einem kleinen Ausschnitt ihrer Selbst rekonstruiert werden
 - Anwendung in der Bildkompression, da nur die Konstruktionsregeln, jedoch nicht das ganze Bild gespeichert werden muss
 - Bilder, die fraktal komprimiert wurden, lassen sich in jeder beliebigen Auflösung wieder herstellen
 - Kompression jedoch nur gut für annähernd selbstähnliche Objekte anwendbar (z.B. Staubwolken, Bäume, Farne)

Wichtige Konzepte

- Fraktal
- Selbstähnlichkeit
- Ähnlichkeitsdimension
- Boxcounting-Dimension
- Hausdorff-Dimension
- Fixpunktfraktal
- Cantormenge, Kochkurve, Sierpinski-Dreieck
- Mandelbrotmenge, Juliamenge

- Fraktale und Mathematik – eine elementare Einführung
E. Behrends. “Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff”. In: Heldermann Verlag, 1994. Kap. Fraktale und Mathematik – eine elementare Einführung. URL: <http://www.heldermann.de/BSM/BSM05/bsm05-191.pdf>

Literatur

- [1] E. Behrends. "Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff". In: Heldermann Verlag, 1994. Kap. Fraktale und Mathematik – eine elementare Einführung. URL: <http://www.heldermann.de/BSM/BSM05/bsm05-191.pdf>.
- [2] Benoit Mandelbrot. "How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension". In: *Science* 156.3775 (1967), S. 636–638. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.156.3775.636. eprint: <http://science.sciencemag.org/content/156/3775/636.full.pdf>. URL: <http://science.sciencemag.org/content/156/3775/636>.
- [3] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman und Company, 1977.